Краткие сообщения ОИЯИ № 6[45]-90 *JINR Rapid Communications No.6[45]-90*
УДК 530.14.5

СВЯЗЬ ПРИВЕДЕННЫХ ШИРИН С R-МАТРИЧНЫМИ РЕЗОНАНСАМИ (МНОГОКАНАЛЬНОЕ ОБОБЩЕНИЕ "ТЕОРЕМЫ О ДВУХ СПЕКТРАХ")

Б.Н.Захарьев

Матрица взаимодействия конечного радиуса полностью определяется положениями R-матричных резонансов и значениями амплитуд их приведенных ширин $\{E_\lambda, \gamma_{\lambda\alpha}\}$, где α – номер канала. Оказывается, в случае M каналов можно выразить $\gamma_{\lambda\alpha}$ с точностью до относительных знаков их α-компонент через $\{E_\lambda\}$ и еще M (всего M + 1) подобных спектров, отвечающих другим линейно независимым однородным граничным условиям. Дается простой вывод соответствующих формул для системы связанных конечно-разностных уравнений Шредингера. Рассматривается предел непрерывной пространственной переменной. В случае расцепленных уравнений полученные формулы переходят в найденные ранее для отдельных (одноканальных) уравнений Б.М.Левитаном и М.Г.Гасымовым /1/. В приложении рассматривается конечно-разностная теорма о двух спектрах.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

The Relation between the Reduced Widths with R-Matrix Resonances (The Multichannel Generalization of the Two-Spectra Theorem)

B.N.Zakhariev

The finite-range interaction matrix is completely determined by the positions of the R-matrix resonances and by their reduced widths $\{E_\lambda, \gamma_{\lambda\alpha}\}$, where α numbers the channels. It appears, that in the case of M channels it is possible to express the $\gamma_{\lambda\alpha}$ up to the relative signs of their α-components through the set $\{E_\lambda\}$ and else M (at all M + 1) similar spectra, corresponding to other homogeneous linearly independent boundary conditions. A simple derivation of relevant formulae for the system of the finite-difference Schroedinger equations is given. The limit of the continuous space variable is considered. For the uncoupled Schroedinger equations these formulae coincide with the single-channel result by B.M.Leviant and M.G.Gasymov /1/. In the appendix the finite-difference two-spectra theorem is considered.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Введение

В стандартной постановке одноканальной обратной спектральной задачи потенциал однозначно определяется *двойным* набором параметров: положениями уровней энергии E_λ (R-матричных резонансов) и нормировочных констант γ_λ (амплитудами приведенных ширин). Для потенциальной ямы с формой, симметричной относительно ее центра, достаточно задать лишь $\{E_\lambda\}$ (см. [2]). Б.М.Левитаном и М.Г.Гасымовым [1] было показано, что в общем одноканальном случае двойному набору $\{E_\lambda, \gamma_\lambda\}$ эквивалентны наборы двух спектров $\{E_\lambda, E_\mu\}$, отвечающих двум независимым способам задания однородных граничных условий задачи Штурма — Лиувилля (теорема о двух спектрах).

На прогулке в окрестностях замка Либице, где происходила конференция "Строгие результаты в квантовой динамике" (11 — 15 июля 1990 г., ЧСФР), отвечая на многочисленные мои "физические" вопросы математик из Донецка М.М.Маламуд высказал мнение, что должно существовать многоканальное обобщение теоремы о двух спектрах [1]. Это послужило стимулом для данной работы.

Особенно прозрачно теорема о двух спектрах доказывается (следуя В.Н.Мельникову, см. [2], с.41—43) для конечно-разностных уравнений. Ниже это доказательство обобщается на случай М-связанных обыкновенных дифференциальных уравнений Шредингера. В приложении рассматривается конечно-разностная теорема о двух спектрах для случая переменного коэффициента при второй производной в уравнении Шредингера (потенциал, зависящий от скорости).

Конечно-разностная многоканальная задача

Рассмотрим систему М-связанных конечно-разностных одномерных уравнений Шредингера ($\hbar = 2m = 1$):

$$-\frac{\Psi_\alpha(n+1) - 2\Psi_\alpha(n) - \Psi_\alpha(n-1)}{\Delta^2} + \sum_\beta^M V_{\alpha\beta}(n)\,\Psi_\beta(n) = E_\alpha \Psi_\alpha(n), \quad (1)$$

где Δ — шаг конечно-разностного дифференцирования, $E_\alpha = E - \epsilon_\alpha$, ϵ_α — энергии порогов возбуждения непрерывного спектра в каналах α.

Однородным граничным условиям

$$\Psi_a(0) = 0; \quad \Psi_a(N+1) = \Psi_a(N+2) \tag{2}$$

отвечают собственные значения $E = E_\lambda$ задачи Штурма — Лиувилля (1), (2). Этих собственных значений конечное число: $(N+1)$ M, равное числу неизвестных в уравнении (1) с учетом условий (2). Обозначим $u_{\lambda a}(n)$ -компоненты соответствующих собственных вектор-функций, удовлетворяющие условиям ортонормировки и полноты:

$$\sum_{a=1}^{M} \sum_{n=1}^{N+1} u_{\lambda a}(n)\, u_{\lambda' a}(n)\, \Delta = \delta_{\lambda\lambda'}; \tag{3}$$

$$\sum_{\lambda=1}^{(N+1)M} u_{\lambda a}(n)\, u_{\lambda a'}(m) = \delta_{aa'} \delta_{nm} / \Delta . \tag{4}$$

Функция Грина $G(n, m)$ для уравнения (1):

$$- \frac{G_{aa'}(n+1, m) - 2G_{aa'}(n, m) - G_{aa'}(n-1, m)}{\Delta^2} +$$

$$+ \sum_{\beta=1}^{M} V_{a\beta}(n)\, G_{\beta a'}(n, m) - E_a G_{aa'}(n, m) = \delta_{aa'} \delta_{nm} / \Delta \tag{5}$$

может быть найдена двумя способами. Заменим в правой части уравнения (5) произведение символов Кронеккера с помощью соотношения полноты (4) и воспользуемся тем, что оператор $\hat{H}$ в левой части (1) имеет собственные вектор-функции с компонентами $u_{\lambda a}$. Разделим обе части (5) на $(\hat{H} + \hat{\epsilon} - E\hat{I})$, где $\hat{\epsilon}$ — диагональная матрица с элементами ϵ_a, и получим

$$G_{aa'}(n, m) = \sum \frac{u_{\lambda a}(n)\, u_{\lambda a'}(m)}{E_\lambda - E}, \tag{6}$$

поскольку действие функции от оператора $f(\hat{H})$ на его собственные функции u_λ эквивалентно умножению на $f(E_\lambda)$, а пороговые константы ϵ_a, одинаковые для всех уровней энергии E_λ, сокращаются.

При $n = m = N + 1$ G переходит в R-матрицу многоканальной системы (1), (2) с положениями E_λ R-матричных резонансов и амплитудами приведенных ширин $\gamma_{\lambda\alpha} = u_{\lambda\alpha}$.

Другой способ решения системы (5) — применить формулу Крамера (будем полагать $m = N + 1$):

$$G_{\alpha\alpha'}(N+1, N+1) = A_{\alpha\alpha'}(E)/D(E), \tag{7}$$

где D — детерминант системы (1), (2):

$$D(E) = \prod_{\lambda=1}^{M(N+1)} (E - E_\lambda), \tag{8}$$

а $A_{\alpha\alpha'}$ — детерминанты, отличающиеся от D заменой α-го столбца соответствующей матрицы на вектор-столбец, отвечающий правой части системы (5) с $m = N+1$ и фиксированным α'. Благодаря тому, что в этом столбце отличен от нуля лишь один элемент, детерминант $A_{\alpha\alpha'}$ совпадает с соответствующим алгебраическим дополнением матрицы коэффициентов системы уравнений (1),(2), а при $\alpha = \alpha'$ – с детерминантами матриц коэффициентов M *других* задач на собственные значения: системы (1) с граничными условиями, несколько модифицированными по сравнению с (2)

$$\Psi_\alpha(0) = 0; \quad \Psi_\alpha(N+1) = (1 - \delta_{\alpha\alpha'})\Psi_\alpha(N+2). \tag{9}$$

Обозначим собственные значения задач (1), (9) как $E_\mu^{\alpha'}$, а соответствующие детерминанты матрицы коэффициентов выражаются через них:

$$A_{\alpha\alpha}\Delta = \prod_{\mu=1}^{M(N+1)-1} (E - E_\mu^\alpha). \tag{10}$$

Спектральные наборы (всего $M + 1$ наборов): $\{E_\lambda\}$, $\{E_\mu^\alpha\}$; $\alpha = 1, 2, \ldots M$ будут использованы для построения компонент нормировочных векторов $\gamma_{\lambda\alpha}$.

В частном случае, когда уравнения в системе (1) расцепляются на независимые уравнения Шредингера, детерминант $D(E)$ распадается на произведение парциальных детерминантов $D_\alpha(E)$ для отдельных уравнений, и аналогично факторизуются детерминанты $A_{\alpha\alpha}(E)$:

$$D(E) = \prod_{\alpha}^{M} D_{\alpha}(E) \; ; \tag{8'}$$

$$A_{\alpha\alpha}(E)\,\Delta = D_{\alpha}(E) \prod_{\beta \neq \alpha}' D_{\beta}(E) \; , \tag{10'}$$

где парциальный детерминант $D_{\alpha}(E)$ отвечает N собственным значениям α-го уравнения (канала со специальным граничным условием $\psi_{\alpha}(0) = \psi_{\alpha}(N+1) = 0$). Спектр системы (1) при расцеплении ее уравнений распадается на сумму M независимых спектров отдельных уравнений. Выражение (7) для функции Грина при $n = N + 1$ с учетом (8) и (10) имеет вид отношения полиномов по E, которое может быть представлено в виде суммы (см. формулу 1.7.4. в книге: Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. М.: Наука, 1974):

$$G_{\alpha\alpha}(N+1, N+1) = \sum_{\lambda} \sum_{j=1}^{k_{\lambda}} \frac{b^{\alpha}_{\lambda j}}{(E - E_{\lambda})^{j}} \; , \tag{11}$$

где k_{λ} — кратность собственных значений $E_{\lambda}(k_{\lambda} \leq M)$. При отсутствии вырождений собственных значений E_{λ} коэффициенты $b_{\lambda j}$ имеют вид

$$b^{\alpha}_{\lambda 1} = A_{\alpha\alpha}(E_{\lambda}) / D'(E) \big|_{E = E_{\lambda}} \; . \tag{12}$$

Сравнивая (11) и (8) при $\alpha = \alpha'$ и $n = m = N + 1$, получаем

$$\gamma^{2}_{\lambda\alpha} = A_{\alpha\alpha}(E_{\lambda}) / D'(E) \big|_{E = E_{\lambda}} = \frac{1}{\Delta} \prod_{\mu = 1}^{M(N+1)-1} (E_{\mu} - E^{\alpha}_{\mu}) \Big/ \prod_{\nu=1}^{M(N+1)}{}' (E_{\lambda} - E_{\nu}),$$

то есть квадраты компонент вектора нормировок выражаются через собственные значения M + 1 спектральных наборов задач (1), (2) и (1), (9). Относительные знаки компонент $\gamma_{\lambda\alpha}$, $\gamma_{\lambda\beta \neq \alpha}$ должны быть определены отдельно (общий знак вектора нормировок не важен).

Когда об этом результате (теорема M + 1 спектра) узнал Б.М.Левитан, который в июле приезжал в Дубну на конференцию по нелинейным уравнениям, он высказал возражение, что в пределе несвязанных уравнений — расцепленных каналов с диагональной матрицей взаимодействия (хороший тест, чтобы сделать результат прозрачней) — должно быть 2M, а не M + 1 спектров — по два на каждое из M отдельных уравнений (по теореме о двух спектрах). Казалось бы, — уничтожающее замечание. Но после короткого "испуга" выяснилось, что при счете спектров нужно учитывать разницу спектров системы уравнений и отдельного уравнения (спектр расцепленной системы представляет собой сумму M независимых одноканальных спектров) и не считать спектры для одного и того же канала дважды.

В случае, когда система (1) распадается на независимые уравнения, формула (14) переходит в обычную связь каждой парциальной нормировки с *двумя* спектрами соответствующего уравнения, а множители в числителе и знаменателе (13), относящиеся к другим уравнениям, сокращаются. При этом *M + 1 спектров общей системы уравнений (1) эквивалентны 2M парциальным спектрам расцепленных уравнений* с независимыми граничными условиями, отвечающими (2), (9).

Предел непрерывной пространственной переменной

Естественно ожидать, что в пределе $\Delta \to 0$, $N \to \infty$ формула (13) будет верна для обычного уравнения Шредингера с непрерывной переменной:

$$\gamma^2_{\lambda a} = A_{aa}(E_\lambda)/D'(E)\big|_{E=E_\lambda} =$$
$$= \frac{1}{\Delta}(E_\lambda - E^a_\lambda) \prod_\mu^{\infty}{}' (E_\mu - E^a_\mu)/(E_\lambda - E_\mu). \tag{14}$$

В случае вырождения собственных значений E_λ коэффициенты $b^a_{\lambda j}$ следует находить последовательно из соотношений $[\phi_\lambda(E) \equiv D(E)/(E - E_\lambda)]$:

$$\Delta A_{aa}(E_\lambda) = b_{\lambda k_\lambda} \phi_\lambda(E_\lambda),$$
$$\Delta A'_{aa}(E_\lambda) = b_{\lambda k_\lambda} \phi'_\lambda(E_\lambda) + b_{\lambda k_\lambda - 1} \phi_\lambda(E_\lambda),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \tag{15}$$
$$\Delta A^{(k_\lambda - 1)}_{aa} = b_{\lambda k_\lambda} \phi^{(k_\lambda - 1)}_\lambda(E_\lambda) + k_\lambda b_{\lambda k_\lambda - 1} \phi^{(k_\lambda - 2)}_\lambda(E_\lambda) + \ldots$$
$$\ldots + k_\lambda!\, b_{\lambda 1} \phi_\lambda(E_\lambda).$$

Автор благодарен М.М.Маламуду и Б.М.Левитану за стимулирующие дискуссии по теме работы.

Приложение

Потенциалы, зависящие от скорости

Так называются потенциалы, зависящие от оператора импульса $\hat{p} = -\nabla$; обычно их записывают в форме

$$v(\hat{p}^2, x) = v(x) + [\frac{d}{dx^2} v_1(x) - v_1(x) \frac{d}{dx^2}]/2 , \qquad (1П)$$

где $v(x)$ и $v_1(x)$ — разные функции от x . Такие потенциалы используют, например, в мезонной теории ядерных сил. Их разностный вариант ("квазилокальный" потенциал с отличными от нуля значениями на трех диагоналях матрицы гамильтониана, см. /2/ стр.50):

$$-[1 + v_1(n)/2]\{\Psi(n+1) - 2\Psi(n) + \Psi(n-1)\}/\Delta^2 + v(n)\Psi(n) + \\ + \{v_1(n+1)\Psi(n+1) - 2v_1(n)\Psi(n) + v_1(n-1)\Psi(n-1)\}/2\Delta^2 = E\Psi(n) \qquad (2П)$$

замечателен тем, что число $2N$ значений v и v_1 на конечном интервале $n = 1, 2,\dots N$ совпадает с числом спектральных параметров $\{E_\lambda , \gamma_\lambda\}$ задачи Штурма — Лиувилля, в отличие от случая обычного разностного уравнения Шредингера с N значениями локального потенциала, когда между $2N$ параметрами $\{E_\lambda, \gamma_\lambda\}$ должно быть N связей. В этом отношении случай разностного потенциала, зависящего от скорости, ближе к случаю уравнения Шредингера с обычным потенциалом, когда параметры $\{E_\lambda, \gamma_\lambda\}$ независимы друг от друга.

Теорема для двух спектров в случае уравнения (2П) совпадает с (14) для одного канала.

Литература

1. Левитан Б.М., Гасымов М.Г. — УМН, 1964, 19, № 2, с.3.
2. Захарьев Б.Н., Сузько А.А. — Потенциалы и квантовое рассеяние. Прямая и обратная задачи. М.: Энергоатомиздат, 1985, с.41-43. (Расширенное издание на англ. языке вышло в изд. Springer, Heidelberg. 1990, p.35-37).

Рукопись поступила 27 августа 1990 года.